正集合の反映原理と飽和イデアルの構成[1] [2]

石井大海

筑波大学博士後期課程二年

Friday 27th October, 2017
数学基礎論若手の会 2017@大学セミナーハウス.

[1]本研究は JSPS 特別研究員奨励費 17J00479 の助成を受けて行われた

[2]This slide is available at `http://bit.ly/konn-fmyg17`

Table Of Contents

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる.

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる.
  - 中でも**飽和性**は強制法や巨大基数と関連し重要な性質である.

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる．
  - 中でも**飽和性**は強制法や巨大基数と関連し重要な性質である．
- 本講演：**超コンパクト基数**と呼ばれる巨大基数と **Lévy 崩壊**を使って，飽和イデアルを実際に構成する．

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる.
  - 中でも**飽和性**は強制法や巨大基数と関連し重要な性質である.
- 本講演：**超コンパクト基数**と呼ばれる巨大基数と **Lévy 崩壊**を使って，飽和イデアルを実際に構成する.
  - cf. 山浦さんの講演：NS_{ω_1} が**弱い飽和性を持つ**.

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる.
  - 中でも**飽和性**は強制法や巨大基数と関連し重要な性質である.
- 本講演：**超コンパクト基数**と呼ばれる巨大基数と **Lévy 崩壊**を使って，飽和イデアルを実際に構成する.
  - cf. 山浦さんの講演：NS_{ω_1} が**弱い飽和性を持つ**.

! 本講演で得られるイデアルは NS とは異なる.

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる.
  - 中でも**飽和性**は強制法や巨大基数と関連し重要な性質である.
- 本講演：**超コンパクト基数**と呼ばれる巨大基数と **Lévy 崩壊**を使って，飽和イデアルを実際に構成する.
  - cf. 山浦さんの講演：NS_{ω_1} が**弱い飽和性を持つ**.
  - ! 本講演で得られるイデアルは NS とは異なる.
- 長いこと folklore で，Bekkali [2] や Farah [3] などで言及されていたが，いずれも証明が間違っている.

概要

- 集合論では，**イデアル**の組合せ論的性質をよく論じる．
  - 中でも**飽和性**は強制法や巨大基数と関連し重要な性質である．
- 本講演：**超コンパクト基数**と呼ばれる巨大基数と **Lévy 崩壊**を使って，飽和イデアルを実際に構成する．
  - cf. 山浦さんの講演：NS_{ω_1} が**弱い飽和性を持つ**．
  - ! 本講演で得られるイデアルは NS とは異なる．
- 😵 長いこと folklore で，Bekkali [2] や Farah [3] などで言及されていたが，いずれも証明が間違っている．
- 😄 本講演では「正しい証明」の概略を与える．

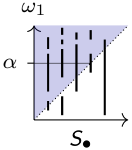
イデアルの基本事項

- $\mathcal{I}$ が Z 上の (**可算完備**) **イデアル**

  $\overset{\text{def}}{\iff}$ (1) $Z \notin \mathcal{I}, \emptyset \in \mathcal{I}$,　(2) $X \subseteq Y \in \mathcal{I} \implies X \in \mathcal{I}$,

  (3) $\{ A_n \mid n < \omega \} \subseteq \mathcal{I} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{I}$.
  - ある種の「小さな（＝測度零の）部分集合」の全体だと思える.
  - 例：Lebesgue 零集合の全体，痩せ集合の全体.
- $A \subseteq Z$ が **$\mathcal{I}$-正集合**（記号：$A \in \mathcal{I}^+$）$\overset{\text{def}}{\iff} A \notin \mathcal{I}$.
- ω_1 上のイデアル $\mathcal{I}$ が**正規** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{I}$ は**対角和集合**で閉じている：$\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \subseteq \mathcal{I}$ に対し

$$\mathop{\triangledown}_{\alpha<\omega_1} S_\alpha := \left\{ \alpha < \omega_1 \;\middle|\; \alpha \in \bigcup_{\xi<\alpha} S_\xi \right\} \in \mathcal{I}.$$



  - 例：**非定常イデアル** NS_{ω_1} は ω_1 上の**最小の正規イデアル**.

イデアルと超冪

以下 $\mathcal{I}$ を素イデアルとする．

- $f, g : \omega_1 \to V$ に対し，

$$f \sim_{\mathcal{I}} g \overset{\text{def}}{\iff} \{\, \alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) \neq g(\alpha) \,\} \in \mathcal{I},$$

$$f\, E_{\mathcal{I}}\, g \overset{\text{def}}{\iff} \{\, \alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) \notin g(\alpha) \,\} \in \mathcal{I},$$

$$[f] := \left\{\, g : \omega_1 \to V \;\middle|\; g \sim_{\mathcal{I}} f, g : \text{ランク最小} \,\right\}$$

  とおく．$\sim_{\mathcal{I}}$ と $E_{\mathcal{I}}$ は両立する．
- $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{I}) := \langle \{\, [f]_{\mathcal{I}} \mid f : \omega_1 \to V \,\}, \sim_{\mathcal{I}}, E_{\mathcal{I}} \rangle$ を $\mathcal{I}$ による V の**超冪**と言う．
- $x \in V$ に対し，$j(x) := [\alpha \mapsto x]_{\mathcal{I}}$ は V から $M = \mathrm{Ult}(V, \mathcal{I})$ への初等埋め込みを与える：$V \models \varphi(\vec{x}) \iff M \models \varphi(j(\vec{x}))$.

強制法と生成超冪

- **強制法**：集合の宇宙 V に理想元 G を付け加える手法.
  - 強制概念 $\mathbb{P}$ は G の十分小さな近似の集合で，近似の詳しさに応じて順序が入る.
- $\mathcal{I}^+ := \{ A \subseteq Z \mid A \notin \mathcal{I} \}$ には $\mathcal{I}$ の差を除いた包含関係で順序が入る：$A \leq_{\mathcal{I}} B \overset{\text{def}}{\iff} A \setminus B \in \mathcal{I}$.

Fact 1

任意のイデアル $\mathcal{I}$ に対して，強制法 $\mathcal{I}^+$ は $\mathcal{I}$ を拡大する素イデアル $\mathcal{J}$ を付加する．更に，$V[G]$ において自然に V の**生成超冪** $V \prec \mathrm{Ult}(V, \mathcal{J})$ が定まる.

? $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{I})$ はどれくらい V に「近い」のか？

- ⋆ $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{J})$ が**整礎的**になると，集合論の基本的な概念（有限，写像，対……）が一致してくれる.
- どういう時に整礎的になるのか？

飽和性と整礎性

- イデアル $\mathcal{I}$ が**急峻**[3] $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{I}$ による生成超冪が常に整礎.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+$ が Z 上のイデアル $\mathcal{I}$ の**反鎖** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$ なら $A \cap B \in \mathcal{I}$. つまり, $\mathcal{I}$ の意味で殆んど交わらない正集合の族.
- イデアル $\mathcal{I}$ が **κ-飽和** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{I}$ の反鎖の濃度は κ 未満.
  特に $\mathcal{I}$ が $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ 上のイデアルで $|X|^+$-飽和の時, 単に $\mathcal{I}$ を**飽和イデアル**と言う.

Fact 2

イデアル $\mathcal{I}$ が飽和的なら $\mathcal{I}$ は急峻であり, その生成超冪 $\mathrm{Ult}(V, \mathcal{J})$ は κ-列について閉じている.

⋆ 飽和性は良い初等埋め込みを与えてくれ, そこから逆に巨大基数の無矛盾性が出たりする.

[3] 英語では precipitous. 提唱者の一人である Prikry の名前を英語に訳すとこうなる.

飽和イデアル：まとめ

- **イデアル**は「測度零」の集合の族の一般化.
- 素イデアルがあると宇宙 V の**超冪**が取れ，初等埋め込み $j : V \xrightarrow{\prec} M$ が得られる.
- イデアルに付随する強制法によって元のイデアルを拡大する素イデアルが取れる.
- こうして得られた素イデアルで**生成超冪**が得られる.
- もとのイデアルが**飽和性**という性質を満たすと，生成超冪が集合論的に扱い易いモデルになる.

Table Of Contents

主定理

本講演では次の証明を与える：

Theorem 3 (I.; but known as folklore for a long time)

κ を超コンパクト基数，G を $(V, \mathrm{Col}(\omega_1, {<}\kappa))$-生成フィルターとする．この時 $V[G]$ において ω_1 上に $\aleph_2$-飽和正規イデアルが存在する．

実際には，同じ論法で次が示せる：

Theorem 4 (I.)

κ を超コンパクト基数，$\lambda < \kappa$ を非可算正則基数，G を $(V, \mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa))$-生成フィルターとする．この時 $V[G]$ において $\mathcal{P}_{\aleph_1} \lambda$ 上に λ^+-飽和正規イデアルが存在する．

主定理

本講演では次の証明を与える：

Theorem 3 (I.; but known as folklore for a long time)

κ を超コンパクト基数，G を $(V, \mathrm{Col}(\omega_1, {<}\kappa))$-生成フィルターとする．この時 $V[G]$ において ω_1 上に $\aleph_2$-飽和正規イデアルが存在する．

実際には，同じ論法で次が示せる：

Theorem 4 (I.)

κ を超コンパクト基数，$\lambda < \kappa$ を非可算正則基数，G を $(V, \mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa))$-生成フィルターとする．この時 $V[G]$ において $\mathcal{P}_{\aleph_1} \lambda$ 上に λ^+-飽和正規イデアルが存在する．

Lévy 崩壊 $\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa)$

Definition 5

- κ を λ^+ に潰す **Lévy 崩壊** $\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa)$ を次で定める：

$$\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa) := \left\{ p \;\middle|\; \begin{array}{c} p\text{:写像}, |p|{<}\lambda, \mathrm{dom}(p){\subseteq}\kappa, \\ p(\alpha){\in}{}^{<\lambda}\alpha \end{array} \right\}.$$

  κ 未満の基数すべてに λ からの全射を付け加える強制法.
- κ が**到達不能基数** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\lambda < \kappa\ 2^\lambda < \kappa$ かつ任意の $\xi < \kappa$ と $\langle\lambda_\alpha < \kappa \mid \alpha < \xi\rangle$ に対し $\sup_\xi \lambda_\xi < \kappa$.

Fact 6

1. $\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa)$ は λ 以下の基数を保つ.
2. κ が到達不能基数の時，$\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa)$ は κ 以上の基数を保つ.

$\rightsquigarrow$ 翻訳：κ が巨大基数なら，$\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa)$ は λ と κ の間の基数だけを全部殺す.

超コンパクト基数

Definition 7

- $j : V \xrightarrow{\prec} M$ が **ξ-超コンパクト埋め込み** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\kappa := \mathrm{cp}(j) < \xi < j(\kappa)$ かつ ${}^{\xi}M \subseteq M$.
- κ が **ξ-超コンパクト基数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ となる ξ-コンパクト埋め込み $j : V \xrightarrow{\prec} M$ が存在.
- κ が**超コンパクト基数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\xi \geq \kappa$ に対し κ は ξ-超コンパクト.

Fact 8

1. 超コンパクト基数は到達不能.
2. κ が超コンパクトなら $\{ \mu < \kappa \mid \mu : 2^{\mu}\text{-超コンパクト} \}$ は定常.
3. $\delta > \kappa$ が到達不能のとき，$\mathrm{Col}(\lambda, {<}\kappa)$-強制拡大の後も δ は到達不能.

余談：Lévy 崩壊 vs. 修正可算台反復

Foreman–Magidor–Shelah は記念碑的な論文で次を示している：

Fact 9 (Foreman–Magidor–Shelah [4, 5])

超コンパクト基数が存在するなら，ある強制拡大において非定常イデアル NS_{ω_1} は $\aleph_2$-飽和.

余談：Lévy 崩壊 vs. 修正可算台反復

Foreman–Magidor–Shelah は記念碑的な論文で次を示している：

Fact 9 (Foreman–Magidor–Shelah [4, 5])

超コンパクト基数が存在するなら，ある強制拡大において非定常イデアル NS_{ω_1} は $\aleph_2$-飽和.

- 「ある強制拡大」は「**修正可算台反復強制法（RCS）**」と呼ばれる手法で構成され，非常に複雑（私も理解してない）.

余談：Lévy 崩壊 vs. 修正可算台反復

Foreman–Magidor–Shelah は記念碑的な論文で次を示している：

Fact 9 (Foreman–Magidor–Shelah [4, 5])

超コンパクト基数が存在するなら，ある強制拡大において非定常イデアル NS_{ω_1} は $\aleph_2$-飽和.

- 「ある強制拡大」は「**修正可算台反復強制法（RCS）**」と呼ばれる手法で構成され，非常に複雑（私も理解してない）.
- Lévy 崩壊は単純で理解しやすい．とにかく飽和イデアルがあればいいだけなら，今回の定理で十分.

余談：Lévy 崩壊 vs. 修正可算台反復

Foreman–Magidor–Shelah は記念碑的な論文で次を示している：

Fact 9 (Foreman–Magidor–Shelah [4, 5])

超コンパクト基数が存在するなら，ある強制拡大において非定常イデアル NS_{ω_1} は $\aleph_2$-飽和.

- 「ある強制拡大」は「**修正可算台反復強制法（RCS）**」と呼ばれる手法で構成され，非常に複雑（私も理解してない）.
- Lévy 崩壊は単純で理解しやすい．とにかく飽和イデアルがあればいいだけなら，今回の定理で十分.
  - Lévy 崩壊は NS_{ω_1} の $\aleph_2$-飽和性を**破り得る**．従って我々が構成するイデアルは NS_{ω_1} とは一般に異なる.

閑話休題

約束およびフィルターとイデアル

記法 1

- 以下 δ を超コンパクト, $E := \{ \kappa < \delta \mid \kappa : 2^\kappa\text{-s.c.} \}$ とする.
- $\mathbb{P}_\alpha := \mathrm{Col}(\omega_1, {<}\alpha)$ とする. $V[G]$ が V の $\mathbb{P}_\delta$-強制拡大の時, $V[G_\alpha]$ を $\alpha \leq \delta$ まで潰した途中の強制拡大とする.

- 以下の構成は双対**フィルター**を構成する方が見通しがよい.
  - $\mathcal{F} \subseteq Z$ が（**可算完備**）**フィルター** $\overset{\text{def}}{\iff}$ (1) $\emptyset \notin \mathcal{F}, Z \in \mathcal{F}$, (2) $A \supseteq B \in \mathcal{F} \implies A \in \mathcal{F}$, (3) $\{ A_n \mid n < \omega \} \subseteq \mathcal{F} \implies \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.
  - ω_1 上のフィルター $\mathcal{F}$ が**正規** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathcal{F}$ は**対角共通部分**で閉じている：任意の $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \subseteq \mathcal{I}$ に対し

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\omega_1} S_\alpha := \left\{ \alpha < \omega_1 \;\middle|\; \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} S_\xi \right\} \in \mathcal{F}.$$

  - **Club フィルター** $\mathcal{C}_{\aleph_1,\lambda}$ は $\mathcal{P}_{\aleph_1} \lambda$ 上の最小の正規フィルター.

飽和フィルターの構成：概要

1. 各 $V[G_\alpha]$ におけるフィルターの増大列 $\langle \mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \leq \delta \rangle$ を構成する．最終的に $\mathcal{F}_\delta$ が求めるものになる．
2. $\mathcal{F}_\alpha$ たちは $\mathcal{C}^V_{\omega_1}$ に定常集合を次々足していって得られる．
   - $\rightsquigarrow$ 特に，$\mathcal{F}_\delta$ の任意の極大反鎖 $\mathcal{A}$ について，その濃度が $\aleph_1$ 以下になることを保証する定常集合を足していく．
   - ⋆ Lévy 崩壊の特徴を使う！
3. $\mu < \delta$ とすると，$V[G_\mu]$ で ω_1 の部分集合は 2^{ω_1} 個．
4. δ は $V[G_\mu]$ で到達不能より $|\mathcal{P}^{V[G_\mu]}(\omega_1)| = (2^{\omega_1})^{V[G_\mu]} < \delta$.
5. とくに，$V[G_\delta]$ では $\delta = \omega_2$ になっているから，途中の $V[G_\mu]$ までで付け加わっている ω_1 の部分集合は高々 $\aleph_1$ 個！

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F}_\delta$ の極大反鎖 $\mathcal{A}$ について $\mathcal{A} \in V[G_\mu]$ となるような $\mu < \delta$ が取れるなら，結局望み通り $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}^{V[G_\mu]}(\omega_1)| < \aleph_2$ となる！

😄 どんな極大反鎖 $\mathcal{A}$ にもこんな μ が取れるように細工しよう！

$\mathcal{A} \in V[G_\mu]$ となる $\mu < \delta$ の見付け方

- $\mathcal{A}$ 自身はさておき，$\mathcal{A}_\mu := \mathcal{A} \cap V[G_\mu]$ が $V[G_\mu]$ の元となるような $\mu \in E$ は沢山ある（E の定常性を使う）.
- 次の補題を使うと，$\mathcal{A}_\mu$ が任意の $\kappa \geq \mu$ について $\mathcal{F}_\kappa$ の極大反鎖になるように出来る：

Lemma 10

μ を到達不能，$\bar{\mu}$ を μ の次の到達不能基数とする．$V[G_\mu]$ において，$\mathcal{B}$ が $\mathcal{F}_\mu$ の反鎖であるとする．この時，$V[G_\mu]$ において ω_1 の定常集合 $S_\mathcal{B}$ が存在し，$S_\mathcal{B} \in \mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ なら任意の $\kappa \geq \mu$ において $\mathcal{B}$ は $\mathcal{F}_\kappa$ の極大反鎖となる.

😄 戦略：$\mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ を作るときに $S_\mathcal{B}$ を全部ブッ込む.

- 正規性を使って一つの定常集合 S_μ だけで済ませる.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}_\mu \subseteq \mathcal{A}$ は $\mathcal{F}_\delta$ で極大反鎖．極大性より $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \in V[G_\mu]$.

具体的な構成

$\kappa \in E$ として $V[G_\kappa]$ において：

$$\mathcal{F}_\kappa := (\mathcal{C}_{\omega_1} \cup \{ S_\mu \mid \mu \in E \cap \kappa \}) \text{ を含む最小の正規フィルター},$$

$$\Delta_\kappa := \left\{ A \in \mathcal{P}_{\aleph_1} \kappa \;\middle|\; A \cap \omega_1 \in \bigcap_{\mu \in E \cap A} (\omega_1 \setminus S_\mu) \right\},$$

$$\tilde{S}_\kappa := \left\{ N \prec \mathcal{H}^{V[G_\kappa]}_{\kappa^+} \;\middle|\; \begin{array}{c} |N| = \aleph_0, \quad \Delta_\kappa, \kappa \in N, \quad N \cap \kappa \in \Delta_\kappa, \\ \forall \mathcal{A} \in N : \mathcal{F}_\kappa \text{ の極大反鎖 } N \cap \omega_1 \in \bigcup (\mathcal{A} \cap N). \end{array} \right\}$$

次に $V[G_{\bar{\kappa}}]$ において

$$S_\kappa := \pi_\kappa(\tilde{S}_\kappa).$$

具体的な構成

$\kappa \in E$ として $V[G_\kappa]$ において：

$$\mathcal{F}_\kappa := (\mathcal{C}_{\omega_1} \cup \{ S_\mu \mid \mu \in E \cap \kappa \}) \text{ を含む最小の正規フィルター},$$

$$\Delta_\kappa := \left\{ A \in \mathcal{P}_{\aleph_1} \kappa \;\middle|\; A \cap \omega_1 \in \bigcap_{\mu \in E \cap A} (\omega_1 \setminus S_\mu) \right\},$$

$$\tilde{S}_\kappa := \left\{ N \prec \mathcal{H}_{\kappa^+}^{V[G_\kappa]} \;\middle|\; \begin{array}{c} |N| = \aleph_0, \quad \Delta_\kappa, \kappa \in N, \quad N \cap \kappa \in \Delta_\kappa, \\ \forall \mathcal{A} \in N : \mathcal{F}_\kappa \text{ の極大反鎖 } N \cap \omega_1 \in \bigcup (\mathcal{A} \cap N). \end{array} \right\}$$

次に $V[G_{\bar{\kappa}}]$ において

$$S_\kappa := \pi_\kappa(\tilde{S}_\kappa).$$

? π_κ とは何か？ なぜ初等部分モデル N が出て来るのか？

射影と定常性

- 前節の π_κ とは何か？
- $\mathcal{H}_\theta$：V の「ミニチュア」的な近似；十分多くの命題について V での真偽と一致する小さなモデル．
- 事実：$|\mathcal{H}_{\kappa^+}^{V[G_\kappa]}| = (2^\kappa)^{V[G_\kappa]} < \bar{\kappa} = \omega_2^{V[G_{\bar{\kappa}}]}$.

$\rightsquigarrow$ $V[G_{\bar{\kappa}}]$ において，$\mathcal{H}_{\kappa^+}^{V[G_\kappa]}$ の濃度は $\aleph_1$ なので，$\mathcal{H}_{\kappa^+}^{V[G_\kappa]} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha^\kappa$ となる列に分解出来る．
  - ⋆ 特に γ が極限順序数なら $S_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} N_\alpha^\kappa$ と出来る．
- この時 $\langle N_\alpha^\kappa \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ は $\mathcal{P}_{\aleph_1} H$ で club．特に次が言える：

Fact 11

$\alpha \in \pi_\kappa(\tilde{S}) \iff N_\alpha^\kappa \in \tilde{S}$ により写像 $\pi_\kappa : \mathcal{P}\,\mathcal{P}_{\aleph_1} \mathcal{H}_{\kappa^+}^{V[G_\kappa]} \to \mathcal{P}\,\omega_1$ を定める．この時，$\pi_\kappa(\tilde{S})$ が定常 $\iff$ $\tilde{S}$ が定常．

- π_κ は $V[G_\kappa]$ の時点では「大きな集合」上の定常集合だったものを，ω_1 上に射影してくれる！

定常集合と初等部分モデル

- 今考えているのは**正規フィルター**であり，$\mathcal{C}$ の最小性から定常集合を融通無碍に使うことになる．
  - 集合 $C \subseteq Z \subseteq \mathcal{P}_{\aleph_1}(X)$ が **club** $\overset{\text{def}}{\iff}$ ある関数 $f : {}^{<\omega}X \to X$ があって $\forall z \in C\ f[{}^{<\omega}z] \subseteq z$.
  - 集合 $S \subseteq Z$ が**定常** $\overset{\text{def}}{\iff}$ S は任意の club 集合と交わる．つまり，任意の $f : {}^{<\omega}X \to X$ の閉包点を含む．
- 初等部分モデル $N \prec \mathcal{H}_\theta$ は $\mathcal{H}_\theta$ の Skolem 関数で閉じている．

$\rightsquigarrow$ どちらも関数の閉包性について議論している！

Lemma 12

1. $C \subseteq \mathcal{P}_{\aleph_1} X$ が *club* $\iff$ $X, C \in N \prec \mathcal{H}_\theta$ 任意の可算初等部分モデルについて $N \cap X \in C$.
2. $S \subseteq \mathcal{P}_{\aleph_1} X$ が定常 $\iff$ ある $N \prec \mathcal{H}_\theta$ で $X, S \in N$ かつ $X \cap N \in S$ を満たすものが存在.

Proof

で，なんで $S_{\mathcal{B}}$ があると上手くいくの？

補題 10をちゃんと述べなおしたのが次の二つ：

Lemma 13

$\mu < \delta$ を到達不能，$\bar{\mu} := \mu^{+I}$ とする．$V[G_\mu]$ において $\mathcal{A}$ を $\mathcal{F}_\mu$ の反鎖とし，$\tilde{S}_{\mathcal{A}}$ を次のように定める：

$$\tilde{S}_{\mathcal{A}} := \left\{ N \prec \mathcal{H}^{V[G_\mu]}_{\mu^+} \;\middle|\; \mu, \mathcal{A}, \mathcal{F}_\mu \in N, N \cap \omega_1 \in \bigcup (N \cap \mathcal{A}) \right\}.$$

$S_{\mathcal{A}} := \pi_\mu(\tilde{S}_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ なら，任意の $\kappa \geq \bar{\mu}$ に対し，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ を含む $V[G_\kappa]$ の任意の正規フィルター $\mathcal{G}$ について $\mathcal{G}$ の極大反鎖．

Lemma 14

上の状況下で，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{F}_\mu$ でも極大になっている．

極大性補題13の証明 I

次の事実を使う：

Fact 15

$\mathcal{F}$ を ω_1 上の正規フィルター，$\mathcal{A} = \langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \subseteq \mathcal{F}^+$ とする．この時，$\bigtriangledown_\alpha S_\alpha$ は $\mathcal{F}^+$ において S_α たちの上限となる．特に，$\mathcal{A}$ が反鎖で $\bigtriangledown_\alpha S_\alpha \in \mathcal{F}$ なら $\mathcal{A}$ は極大．

$V[G_{\bar{\mu}}]$ において議論する．$|\mathcal{A}| \leq (2^{\aleph_1})^{V[G_\mu]} < \bar{\mu} = \omega_2$ となるから，$\mathcal{A} = \{ f(\alpha) \mid \alpha < \omega_1 \}$ と数え上げることが出来る．適切な関数の閉包をとれば，次の集合は ω_1 で club となることがわかる：

$$C := \{ \alpha < \omega_1 \mid N^\mu_\alpha \cap \omega_1 = \alpha, \quad f[\alpha] = N^\mu_\alpha \cap \mathcal{A} \}.$$

よって，$\mathcal{C}$ の最小性と仮定から $\pi_\mu(\tilde{S}_\mathcal{A}) \cap C \in \mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ となる．従って，あとは $\bigtriangledown_\alpha f(\alpha) \supseteq \tilde{S}_\mathcal{A} \cap C$ が示せればよい．

極大性補題13の証明 II

そこで $\alpha \in \pi_\mu(\tilde{S}_{\mathcal{A}}) \cap C$ を任意に取って，$\alpha \in \bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi)$ を示せばよい．この時，π_μ の定義から，$N := N^\mu_\alpha \in S_{\mathcal{A}}$ となる．すると，C と $\tilde{S}_{\mathcal{A}}$ の定義から $\alpha = N^\mu_\alpha \cap \omega_1 \in \bigcup(N \cap \mathcal{A}) = \bigcup f[\alpha] = \bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi)$ を得る． □

- ! 上の証明は $\mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ を含むフィルターにしか使えない！ $\mathcal{F}_\mu$ での極大性は？
- $\rightsquigarrow$ 正集合の一貫性が必要！

正集合の一貫性と補題 14

実は，次の補題が示せる：

Lemma 16

$\mu < \kappa \leq \delta$ とし，$A \in \mathcal{F}_\mu^+ \cap V[G_\mu]$ とする．このとき，$A \in \mathcal{F}_\kappa^+$．

Proof of Theorem 14.

$\mathcal{A} \in V[G_\mu]$ が $\mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ で極大だとする．任意の $a \in \mathcal{F}_\mu^+ \cap V[G_\mu]$ を取って，$b \in \mathcal{A}$ で $a \cap b \in \mathcal{F}_\mu^+$ となるものを見付けよう．いま，上の一貫性補題から $a \in \mathcal{F}_{\bar{\mu}}^+$ であり，$\mathcal{A}$ の $\mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ での極大性より $b \in \mathcal{A}$ で $a \cap b \in \mathcal{F}_{\bar{\mu}}^+$ となるものが取れる．ここで，定義から明らかに $\mathcal{F}_\mu \subseteq \mathcal{F}_{\bar{\mu}}$ なので，$a \cap b \in \mathcal{F}_{\bar{\mu}}^+ \subseteq \mathcal{F}_\mu^+$ を得る． □

飽和性の証明：正規性

- 「正規性を使って」一つの S_μ で済ませる，と宣言した．

$$\tilde{S}_\kappa := \left\{ N \prec \mathcal{H}_{\kappa^+}^{V[G_\kappa]} \;\middle|\; \begin{array}{c} |N|=\aleph_0, \quad \Delta_\kappa,\kappa\in N, \quad N\cap\kappa\in\Delta_\kappa, \\ \forall\mathcal{A}\in N : \mathcal{F}_\kappa \text{の極大反鎖 } N\cap\omega_1\in\bigcup(\mathcal{A}\cap N). \end{array} \right\}$$

$$S_\kappa := \pi_\kappa(\tilde{S}_\kappa).$$

- 実際，$\tilde{S}_\mu$ では「N 自身が知っている全ての極大反鎖」を考慮している．
  - これは**対角共通部分**に相当．
  - これを $\mathcal{F}_\mu$ に入れている．あとは $\mathcal{A}_\kappa$ を含む N たちを取ってくれば，その全体は $\mathcal{F}_\mu$ に属する．
  - これで万事 OK!
- まとめ：$\mathcal{F}_\mu$ の極大反鎖 $\mathcal{A}$ を取る→ $\mathcal{A}_\mu := \mathcal{A} \cap V[G_\mu] \in V[G_\mu]$ を満たす μ が取れる→ $\mathcal{F}_\mu$ で $\mathcal{A}$ の極大性を担保する定常集合が $\mathcal{F}_\mu$ で付加されている→極大性より $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \to |\mathcal{A}_\mu| \leq |\mathcal{P}^{V[G_\mu]}(\omega_1)| < \aleph_2$.

残っていること

とりあえず，以下を認めれば証明は出来た：

1. $\mathcal{F}_\mu$ たちが実際に真のフィルターとなること.
2. 正集合の一貫性補題が成り立つこと.

! 実は，これらの証明に S_μ たちが 2^μ-超コンパクト基数上で定義されていることが必要！

… 次の補題を繰り返し適用して証明する：

Lemma 17 (正集合反映原理)

μ を 2^μ-超コンパクト基数とし，$V[G_\mu]$ で議論する．任意の定常集合 $S \subseteq \left\{ N \prec \mathcal{H}_{\mu^+}^{V[G_\mu]} \,\middle|\, N \cap \mu \in \Delta_\mu \right\}$ に対して，$\mathcal{H}_\theta$ の可算初等部分モデルの連続列 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ が取れて $\{ \alpha < \omega_1 \mid N_\alpha \in S \} \in \mathcal{F}_\mu^+$ となる.

反映原理と生成条件拡張補題

- 実際には，上の正集合反映原理と**生成条件の拡張補題**を同時に帰納法で示す．
- **生成条件**は Lévy 崩壊の**適正性**と呼ばれる性質と関連する概念で，非常に美しい理論があるが，それを述べるにはちょっと時間が足りない．
- わかる人向けに主張だけ載せておく：

Lemma 18 (生成条件の拡張補題)

$\nu < \mu \in E$ とし，$N \prec \mathcal{H}_\theta$ を可算初等部分モデル，$p \in \mathbb{P}_\mu \cap N$，$q$ を $(N, \mathbb{P}_\nu)$-生成条件で $p \parallel q$ かつ $q \Vdash$ "$N \cap \nu \in \Delta_\nu$" が成り立つとする．この時，$N^* \succ N$ と $(N^*, \mathbb{P}_\mu)$-生成条件 $r \leq p, q$ で $N \cap \omega_1 = N^* \cap \omega_1$ かつ $r \Vdash$ "$N \cap \mu \in \Delta_\mu$" を満たすものが存在．

Table Of Contents

拡張補題の応用

- 拡張補題は μ に関する帰納法で示され，μ から μ^{+E} へ移る後続ケースに反映原理を使う．
- 拡張補題から得られる一番顕著な補題が次：

Lemma 19 (正集合の特徴付け)

次は同値：

1. $A \in \mathcal{F}_\mu^+$,
2. 十分大きな θ に対し，$\mu, A, \mathcal{F}_\mu \in N$，$N \cap \mu \in \Delta_\mu$ かつ $N \cap \omega_1 \in A$ となる $N \prec \mathcal{H}_\theta$ が定常個存在する，
3. 十分大きな θ に対し，$\mu, A, \mathcal{F}_\mu \in N$，$N \cap \mu \in \Delta_\mu$ かつ $N \cap \omega_1 \in A$ となる $N \prec \mathcal{H}_\theta$ が少なくとも一つ存在する．

特に，$\mathcal{F}_\mu$ は $\mathcal{P}_{\aleph_1}\mu$ の上の *club* フィルターの Δ_μ への制限を ω_1 上に射影したものになっている．

これは補題 12に似ている！

制限と射影

制限と射影は良い性質を保つ：

Remark 1

- Z 上のフィルター $\mathcal{F}$ の S への制限は $\mathcal{F} := S := \{ A \subseteq Z \mid A \cap S \in \mathcal{F} \}$ で定義される．制限で正規性は保たれ，S が $\mathcal{F}$-正なら $\mathcal{F} \restriction S$ は非自明になる．
- $\omega_1 \leq \kappa$ の時 $\mathcal{P}_{\aleph_1} \kappa$ 上のフィルター $\mathcal{F}$ の ω_1 への射影 $p(\mathcal{F})$ は次で定められる：

$$A \in p(\mathcal{F}) \iff \{ z \in \mathcal{P}_{\aleph_1} \kappa \mid z \cap \omega_1 \in A \} \in \mathcal{F}.$$

  射影により非自明性・正規性は保たれる．
- 実は任意の正規フィルターは，大きな集合上の club フィルターの定常集合への制限の射影として書け，vice versa.

研究の現在とこれから

- 現時点：$\mathcal{F}$ ではなく Δ たちに着目し，証明を整理.
  - 拡張補題と単調性を満たすような $\langle \Delta_\alpha \mid \alpha \leq \delta \rangle$ を先に考えるように.

  $\rightsquigarrow$ 非自明性と正規性は自明になる.
  - 抽象的な正集合反映原理も証明可能.
    - ω_1 上だけでなく $\mathcal{P}_{\aleph_1}\lambda$ 上に飽和フィルターを作るため，ω_1-鎖ではなく有向族で添え字づけられた反映原理を定式化.
  - 正集合反映原理が古典的な**定常集合反映原理**を導くことを確認（多分誰もやってない）.
- これから：各 $\mu \in E$ で正集合反映原理を使うのではなく，あるフィルターの飽和性を満たすような**一つの反映原理を分離**できないか？
  - 一つのフィルター／定常集合に関する反映原理ではなく，そうしたものの系列に対する反映原理になるのではないか.
  - そうした反映原理の無矛盾性の境界はどこか？

参考文献 I

[1] Uri Abraham, **Proper Forcing**, Handbook of Set Theory, ed. by Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, Springer Netherlands, 2010, chap. 5, pp. 333–394, ISBN: 978-1-4020-5764-9.

[2] Mohamed Bekkali, **Topics in Set Theory: Lebesgue Measurability, Large Cardinals, Forcing Axioms, Rho-functions**, Lecture Notes in Mathematics **1476**, Springer Berlin Heidelberg, 1991, ISBN: 978-3-540-54121-9, DOI: 10.1007/BFb0098398.

[3] Ilijas Farah, **A proof of the Σ^2_1-absoluteness theorem**, Advances in Logic, Contemporary Mathematics 425 (2007), ed. by S. Jackson S. Gao and Y. Zhang, pp. 9–22.

[4] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah, **Martin's maximum, saturated ideals and nonregular ultrafilters. Part I**, Annals of Mathematics, 2nd ser. 127.**1** (Jan. 1988), pp. 1–47.

[5] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah, **Martin's maximum, saturated ideals and nonregular ultrafilters. Part II**, Annals of Mathematics, 2nd ser. 127.**3** (May 1988), pp. 521–545.

参考文献 II

[6] Matthew Foreman, **Ideals and Generic Elementary Embeddings**, Handbook of Set Theory, ed. by Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, Springer Netherlands, 2010, chap. 13, pp. 885–1147, ISBN: 978-1-4020-5764-9.

[7] Thomas Jech, **Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded**, 3rd, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002, ISBN: 978-3-540-44085-7.

[8] Akihiro Kanamori, **The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings**, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2009.

[9] Saharon Shelah, **Proper and Improper Forcing**, ed. by S. Feferman et al., 2nd, vol. 5, Perspectives in Mathematical Logic, Berlin: Springer-Verlag, 1998, ISBN: 3-540-51700-6.

参考文献 III

[10] Saharon Shelah and Masahiro Shioya, **Nonreflecting stationary sets in $\mathcal{P}_\kappa\lambda$**, Advances in Mathematics 199.**1** (2006), pp. 185–191, ISSN: 0001-8708, DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2005.01.012, URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870805001015.

[11] Masahiro Shioya, **Stationary reflection and the club filter**, Journal of Mathematical Society of Japan 59.**4** (2007), pp. 1045–1065, DOI: 10.2969/jmsj/05941045.

[12] Masahiro Shioya, **The Minimal Normal μ-Complete Filter on $P_\kappa\lambda$**, Proceedings of the American Mathematical Society 123.**5** (1995), pp. 1565–1572, ISSN: 00029939, 10886826, URL: http://www.jstor.org/stable/2161149.

以下
詳細

初等部分モデルと定常性：証明

Proof of Theorem 12.

1. $(\Rightarrow)$：C が club である証拠となる $f : {}^{<\omega}X \to X$ を取れば，$N \prec \mathcal{H}_\theta$ より $N \models f$：関数．よって $X \cap N$ は f について閉じているので $X \cap N \in C$.
   $(\Leftarrow)$：明らかに $\{ N \cap X \mid C, X \in N \prec \mathcal{H}_\theta \} \subseteq C$ であり左辺の集合は club.
2. $(\Longleftarrow)$ を示す．初等性より次を言えばよい：

$$N \models \forall f : {}^{<\omega}X \to X\ \exists z \in S\ f[{}^{<\omega}z] \subseteq z.$$

しかし $f \in N$ なら $f[{}^{<\omega}(N \cap X)] \subseteq N \cap X$ が成り立つので，

$$\mathcal{H}_\theta \models \exists z \in S\ f[{}^{<\omega}z] \subseteq z.$$

よって初等性より $N \models \exists z \in S\ f[{}^{<\omega}z] \subseteq z$ を得る． Back

$\square$