集合論への招待[*]

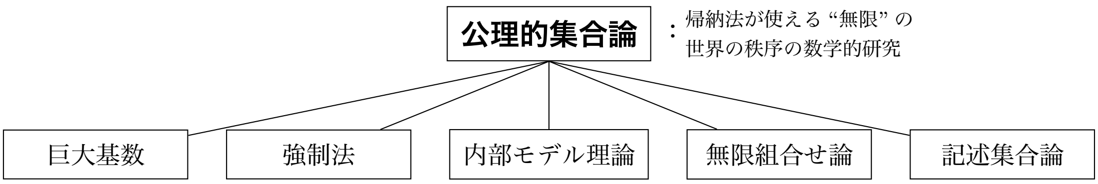
～実数直線の集合論～

石井大海[†]

Saturday 4th June, 2016

1　はじめに：公理的集合論の概要

現代の集合論は，粗く見積っても五つの分野から成る大きな分野になっています．ひとことで集合論を要約してしまえば，「**集合論の公理のモデルの研究**」という事になります．しかし，これでは群論が群＝群の公理のモデルを，微分幾何が多様体＝多様体の公理のモデルの研究をするのと同じことで，余りわかったような気分にならないかもしれません．



集合論の人間は，つまるところ何を知りたいと思って研究しているのか？という問題意識には，勿論研究者によって異なります．それでも最大限公約数を取れば，それは「**"無限" の世界の秩序の数学的探求**」である，と大雑把に纏める事が出来るでしょう．ばくぜんと「無限」といっても定義をしない事には数学にはなりません．特に，現代で「集合論の公理系」といった際にまず意識される[*1)] Zermelo–Fraenkel の集合論（**ZF**）ないし，特に「**帰納法が使えるボトムアップに創り上げられた無限**」について考えています．

こうした無限の世界の秩序について，**どの定理が** ZFC **から導かれ，どの定理は導かれないのか**といった事に興味を持って研究しているのが集合論者です．この事を説明するために，まずは有名な連続体仮説を巡る集合論の発展の歴史について見ていましょう．

2　連続体仮説

集合論の成立は 19 世紀末のことですが，その契機となったのは，Cantor による Fourier 級数展開の研究でした．Cantor は，「不連続点が "幾つ" までなら Fourier 級数展開が可能なのか？」という問題に取り組み，その過程で**集合の濃度（基数）**や**順序数**といった概念を定式化する必要に迫られたのです．集合論創始者の称号

[*] This resume is available on `http://konn-san.com/math/freshman-2016-resume.pdf`

[†] 筑波大学数理物質科学研究科数学専攻博士後期課程 1 年

[*1)] 他にも ZFC とは異なる発想に基づいた集合論の体系もありますが，筆者も専門ではないので本講演では扱いません．

は，その提唱者である Cantor と Dedekind に帰せられますが，Cantor はこうした基数や順序数の概念そのものの研究に向かっていったのに対し，Dedekind はそれを数学の基礎付けに応用したり，数論に応用してみせるなど数学の「基礎言語」としての研究を積極的に行いました．こうした二人の問題意識は，形を変えて現代の集合論にも受け継がれています．

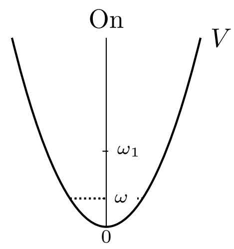
ひとまず，まずは基本的な定義と**順序数**について定義しましょう：

Def. 1.
- V により集合全体の成すクラスを表す．V を**宇宙**と呼ぶ．
- 関係 R が A 上で**整礎** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の A の空でない部分集合が R-極小元を持つ．
- (A, R) が**整列集合** $\overset{\text{def}}{\iff}$ R は A 上の整礎な全順序．
- 整列集合の順序型を**順序数**と呼び，全体を On で表し，以下変数 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ は特に断わらない限り順序数表す物とする．$\mathrm{otp}(A, R) = \mathrm{otp}(B, R')$ なら $(A, R) \simeq (B, R')$ を満たすようなもののこと．特に，順序数は「それ未満の順序数」全体になっており，$\mathrm{otp}(A, R) = \alpha$ の時，$(A, R) \simeq (\alpha, \in)$ となる（所属関係 $\in$ が整列順序となっている）．以下，順序数 α, β に対し $\alpha < \beta \overset{\text{def}}{\iff} \alpha \in \beta$ と書く．
- 任意の順序数 $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ を α の**後続順序数** と呼ぶ．何らかの β について $\alpha = \beta + 1$ と表せる順序数を**後続順序数**と呼び，0 でも後続順序数でもないものを**極限順序数**と呼ぶ．極限順序数は γ, ξ, η などで表す場合が多い．
- $\mathbb{N}$ の順序型を ω で表す．最小の無限順序数で，$\mathbb{N}$ そのものと同一視できる．
- 集合 x に対してその**冪集合** を $\mathcal{P}(x)$ で表す：$y \in \mathcal{P}(x) \iff y \subseteq x$.

実は，集合の宇宙はこの順序数に沿ってボトムアップに構成されている，ということがわかります[*2)]：

定理 1. 各順序数 $\alpha \in \mathrm{On}$ に対して，V_α を次で定義する：

$$V_0 := \emptyset, \qquad V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha), \qquad V_\gamma := \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta \quad (\gamma : \text{極限順序数}).$$



このとき，$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$.
そこで，各集合 $x \in V$ に対して，$x \in V_{\alpha+1}$ となる最小 $\alpha \in \mathrm{On}$ を x の**ランク**といい，$\mathrm{rank}(x)$ で表す．

順序数の理論は非常に簡明ですので，Cantor は基数の理論をこれに帰着させたい，と考えました．この要求の結果として出て来たのが，今日では選択公理と同値である事で有名な次の**整列定理**です．

[*2)] これは実際には von Neumann による**基礎の公理**のお陰で証明出来るので，Cantor らの頃の公理化されていない集合論の定理ではありません．しかし，こうした生成的な集合観は基礎の公理が提案される以前から集合論者の脳裡にあったものです．

定理 2 (整列定理). 任意の集合について，その上の整列順序が存在する．

さて，全単射が存在するなら，二つの集合の濃度は等しいといっていいだろう，というのが Cantor の着想でした．順序数を用いれば，以下のようにして濃度の等しい集合の代表元としての基数を定義出来ます：

Def. 2.

- 集合 A の濃度 $|A|$ を次で定義する：

$$|A| := \min \{ \operatorname{otp}(A, R) \mid R : A \text{ 上の整列順序} \}.$$

- 順序数 κ が**基数** であるとは，$|A| = \kappa$ を満たす A が存在すること．特に，これは「κ 未満の順序数から全射が存在しないこと」と同値．
  基数の全体を Cd で表し，以下 $\kappa, \lambda, \theta, \ldots$ などは基数を亘る変数とする．
- $\aleph_0 = \omega$ は自然数全体の濃度であり、選択公理の下で最小の無限基数である．
- 基数 κ に対し，$2^\kappa := |\mathcal{P}(\kappa)|$ を κ の冪と呼ぶ．

Cantor の初期集合論における華々しい成果として，**対角線論法**の発明と，それによる $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ の証明が挙げられるでしょう．

定理 3. $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

同様の論法によって，一般の基数 κ について次が示せます：

定理 4. 任意の基数 κ に対し，$\kappa < 2^\kappa$.

これによって，**いくらでも大きな無限基数が存在する**という事が明らかになりました．そこで，以下のようにして無限基数の $\aleph$-系列を定義することが出来ます：

Def. 3. κ を基数とする. この時, κ より大きな最小の基数を κ の**後続基数**と呼び, $\kappa^+ := \min \{ \lambda \mid \kappa < \lambda \}$ で表す．順序数 $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，無限基数の**$\aleph$-系列**を次で定義する：

$$\aleph_0 := \omega = |\mathbb{N}|, \qquad \aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+, \qquad \aleph_\gamma := \omega_\gamma := \sup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha.$$

しかし，上の定理は単に「自然数全体より実数全体の方が真に大きい」という情報しか与えてくれず，両者の中間の濃度が存在するのか？ということは一切わかりません．Cantor は「$\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間の濃度は**存在しない**」，つまり実数の無限集合の濃度はキッカリ $\aleph_0$ か $2^{\aleph_0}$ しかないと予想しました．これが**連続体仮説**（CH）です．

連続体仮説． $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

これを一般化したのが，**一般連続体仮説**（GCH）です：

一般連続体仮説． 任意の無限基数 κ に対し $2^\kappa = \kappa^+$.

いいかえれば，「ある無限基数よりも大きな最小の無限基数を得る方法は冪集合を取るしかない」という予想です．

19 世紀末に提唱されて以来，多くの人々がこの証明を試みました．しかし，その解決には 20 世紀半ばまで待つ必要がありました．

2.1 無矛盾性，独立性，不完全性定理

しかし，良く知られているように，連続体仮説はZFC **からは証明出来ない**ことがわかっています．このことを説明するために，ロジックの初歩知識を簡単に説明しましょう．

Def. 4. 公理の集合 T で，与えられた論理式が公理かどうか「機械的に」判定出来るものを**理論**と呼ぶ．特に，PA により自然数論のペアノ算術の公理系を表す．

- 「理論 T が無矛盾である」ことを主張する命題を $\mathrm{Con}(T)$ と書く．以下，各理論の中で $\mathrm{Con}(T)$ は適切に表現出来るものとする．
- 理論 T の無矛盾性から S の無矛盾性を証明出来るとき（つまり $\mathrm{Con}(T) \implies \mathrm{Con}(S)$ が成り立つとき），T は S より**無矛盾性の意味で強い**と言い，$S \leq T$ と書く．
- $S \leq T$ かつ $T \leq S$ が成り立つ時，S と T は**無矛盾性等価**であるといい，$S \sim T$ と書く．
- 命題 φ が T と**無矛盾** $\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{Con}(T + \varphi)$
- 命題 φ が T から**独立** $\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{Con}(T + \varphi) \wedge \mathrm{Con}(T + \neg\varphi)$.

じゃっかん判りづらいと思うので，簡単に説明しておきましょう．たとえば，「任意の群は可換か？」つまり「群の公理系 Group から可換性の公理 Comm は出てくるか？」という問題を考えてみましょう．まず，$(\mathbb{Z}, +)$ は群の公理を満たし，更に可換です．いいかえれば，$(\mathbb{Z}, +)$ は Group + Comm の**モデル**になっています．し

たがって，少なくとも「群の公理系に可換性の公理を付け加えても無矛盾」という事がわかります．このように，（哲学的な議論を気にしなければ）「無矛盾である」ことは「**モデルが存在する**」ことと同値だと考えて問題ありません．

さて，可換性の公理は群の公理系と無矛盾であることがわかりました．では，群の公理系から可換性が示せるのではないか？という気がしますが（しない人が殆んどだと思いますけど，気がしてください），良く知られているように乗法群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を考えれば，これは一般には可換ではありません．つまり，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は Group + ¬Comm のモデルになっている訳です．Comm の否定が成り立つモデルがある以上，Group から Comm は**証明出来ない**という事がわかります．つまり，「命題 P の否定が無矛盾（モデルを持つ）なら，P は証明不可能」ということになります．これまでの議論は，群の公理系 Group から可換性の公理 Comm は**独立**であるということです．

以上を踏まえると，有名な Gödel の不完全性定理は，次を主張するものです：

第一不完全性定理. T を PA を含む無矛盾な理論とするとき，$\mathrm{Con}(T+\varphi)$ および $\mathrm{Con}(T+\neg\varphi)$ を満たす命題 φ が必ず存在する．

第二不完全性定理. 上と同じ仮定のもとで, 特に $\mathrm{Con}(T)$ は φ の例. 特に, T から自身の無矛盾性 $\mathrm{Con}(T)$ を証明することは出来ない.

この系として，上で定義した順序 $\leq$ について，次が成り立つことがわかります：

系 1. $T \lneqq T+\mathrm{Con}(T)$.

Proof. $T \leq T+\mathrm{Con}(T)$ は自明．そこで $T \geq T+\mathrm{Con}(T)$ を仮定して矛盾を導く（**背理法**）．この背理法の仮定は，定義に戻れば $\mathrm{Con}(T) \implies \mathrm{Con}(T+\mathrm{Con}(T))$ ということである．ところで，当然のことながら $\mathrm{Con}(T)$ は $T+\mathrm{Con}(T)$ の「公理」であり，証明可能．すると，仮定から $\mathrm{Con}(T+\mathrm{Con}(T))$ も $T+\mathrm{Con}(T)$ で証明可能となるが，これは第二完全性定理に矛盾する． □

要は，「**ある体系にその無矛盾性を付け加えると無矛盾性は真に強くなる**」という事で，これさえ抑えておけば十分です．そして，現代集合論の主要なテーマの一つは，ZF を含む理論に関して**順序 $\leq$ の構造の解明と分類にある**といっても過言ではありません．

2.2 連続体仮説の「解決」：内部モデル理論と強制法

以上を踏まえて連続体仮説の解決について説明しましょう．

2.2.1 GCH **の肯定の無矛盾性：内部モデル理論**

時は下って 20 世紀半ば，まず Gödel は ZF に AC と GCH を付け加えた体系の無矛盾性を示しました：

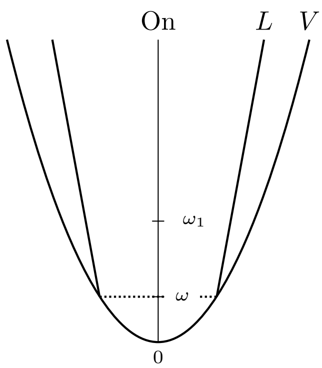
定理 5 (Gödel, 1938). ZF で考える．構成可能宇宙 L において，$\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}$ が成り立つ．特に，選択公理 AC および一般連続体仮説 GCH は ZF と無矛盾．

以下，構成可能宇宙 L について解説していきます．Gödel の基本的な考え方は，**集合の宇宙 V を内側に削っていく**ことでした．具体的には，L は**論理式を用いてボトムアップに定義出来る集合全体**だと思うことが出来ます．

Def. 5.
- $\mathrm{Def}(A)$ により，A の元をパラメータに使った論理式で定義出来る A の部分集合全体を表す．つまり，$S \in \mathrm{Def}(A) \iff {}^{\exists}\varphi[\vec{x},\vec{y}]\ \exists \vec{a} \in A \text{ s.t. } S = \left\{ \vec{b} \in M \;\middle|\; M \models \varphi[\vec{a},\vec{b}] \right\}$.
- 順序数 α について，L_α を次で定める：

$$L_0 := \emptyset, \qquad L_{\alpha+1} := \mathrm{Def}(L_\alpha), \qquad L_\gamma := \bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta\ (\gamma : \text{極限}).$$

$L := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha$ とおき，L を**構成可能宇宙**と呼ぶ．
$x \in L$ に対し，$x \in L_{\alpha+1}$ を満たす最小の α を x の**L-ランク**と呼び，$\rho(x)$ で表す．



L_α や L の定義が，V_α による V の分類に似ている事に気付いたでしょう．つまり，$V_{\alpha+1}$ を創る際にはどんなものであれ，V_α の部分集合を全部持ってきたのに対し，$L_{\alpha+1}$ を創る際には，論理式で定義出来るいうなれば「素性のハッキリした」部分集合だけを持ってきた訳です．

これは，群でいえば交換子群を取ったようなもので，与えられたモデルから「素性のよい元」だけ集めた内側の世界を創っているのだと考えられます．

そして，Gödel はこの L が $\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}$ のモデルになっていることを示しました．しかし，ここでアレ？と思った人が出て来たかもしれません．なぜなら，Gödel の不完全性定理により「ZF から ZF の無矛盾性は示せない」はずなのに，ここでは ZF の下で $\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}+\mathrm{GCH}$ のモデルを構成したことになっています．ZF より大きな理論が無矛盾なんですから，結局そこから ZF の無矛盾性が出て来る筈で，となると結局 ZF から ZF 自身の無矛盾性を示してしまったように見えます．

実は，実際に Gödel が示したことは，「この L を**外側**（メタレベル）**から眺めると**，あたかも $\mathrm{ZFC}+\mathrm{GCH}$ のモデルであるかのように見える」ということです．より厳密には，次の**メタ**定理を示したのです：

定理 6 (Gödel). φ を $\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ の公理とすると，φ^L は ZF で証明可能．ここで，φ^L は φ の L への**相対化**であり，φ に現れる量化子 $\exists x, \forall x$ を全て $\exists x \in L, \forall x \in L$ で置き換えたもの．

これはつまり，$\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ の公理 φ が一つ与えられるたびに，$\mathrm{ZF} \vdash \varphi^L$ が成り立つ，という事です．L は集合ではなく論理式で定義される真のクラスで，つまり V そのものの元ではありません．従って，ZF から $\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ のモデルの**存在**が示された訳ではない訳です．寧ろ，メタレベルで ZF のモデル V をとって，それを変形して $\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ のモデル L を創った，と考えるのがよいでしょう．

とはいえ，集合論の人間も普段は V も L も単なるモデルとして扱っていますので，以下では必要な場合いがいそんなに煩くいわないことにします．

実は，L は ZF の**最小のモデル**であることがわかります：

定理 7. (1) L は**推移的**である．即ち $x \in y \in L \implies x \in L$.

(2) $L \cap \mathrm{On} = V \cap \mathrm{On}$. 即ち L は V と同じ順序数を持つ．

(3) $\mathrm{On} \subseteq M \subseteq V$ を推移的な ZF のモデルとすると，$L^M = L^V$．特に $L \subseteq M$.

L で GCH が成り立つことの証明はちょっと大変なのでやりませんが，代わりに選択公理の無矛盾性証明をしておきましょう．より強く，L の中ではL **全体の大域整列順序**が $<_L$ 存在します：

定理 8. L の全体の整列順序 $<_L$ で，任意の $x \in L$ に対し $\{\, y \in L \mid y <_L x \,\}$ が集合を成すようなものが存在する．

Proof. L は空集合から初めて，論理式で定義可能な部分集合全体を取っていって得られたことに注意しましょう．特に，$x \in L$ は必ずどこかの $L_{\alpha+1}$ で追加され，それは，論理式 $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ とパラメータ $\vec{a} \in L_\alpha$ を用いて定義されていました．

そこで，$\max\{\, \rho(a), \rho(b) \,\}$ についての帰納法により，$a, b \in L$ を次のように比較すればよさそうです：

(a) 先に作られた方が小さい．つまり $\rho(a) < \rho(b)$ ならば $a <_L b$.

(b) $\rho(a) = \rho(b)$ の時を考える．論理式は何らかの自然数でコードされていると考えれば，それを比べることで a, b それぞれを定義する最小の論理式 φ_a, φ_b が取れ，それらは整列出来る．もし $\varphi_a < \varphi_b$ ならば $a <_L b$ とする．

(c) $\alpha = \rho(a) = \rho(b), \varphi_a = \varphi_b$ の時は，パラメータを比べるしかない．これらは L_α の元なので，帰納法の仮定から既に整列順序が入っているから，このパラメータの辞書式順序で比べる．

こうすれば，$<_L$ が整列順序になっていることは明らかでしょう． $\square$

V と同じ順序数を持つ推移的な ZF のモデルのことを**内部モデル**と呼びます．特に，条件 (3)は「L は ZF の最小の内部モデルである」と言い換えることが出来ます．ゲーデルが示したことを要約すれば，「集合の宇宙には核のような部分があり，そこではあたかも ZFC + GCH が成り立っているかのように見える」ということになります．

さて，こうして Gödel は ZF のモデルから，ZFC + GCH のモデルを構成した訳です．したがって，前節の記号法を使えば，次の無矛盾性の結果が得られたことになります：

系 2. ZF $\sim$ ZFC $\sim$ ZFC + GCH.

このように，与えられた集合の宇宙の内側に潜っていって，ある命題の独立性を確立しようとするのが，冒頭に触れた**内部モデル理論**です．

2.2.2　GCH **の否定の無矛盾性：強制法**

一方，ZF + $\neg$GCH の無矛盾性が示されるのは，20 世紀半ばのことで，Gödel の結果から四半世紀以上待たなければなりませんでした：

定理 9 (Cohen, 1963). Con(ZFC) $\Longrightarrow$ Con(ZFC + $\neg$GCH).
Gödel の結果と合わせれば，GCH は ZFC から独立．また，ZF $\sim$ ZFC $\sim$ ZFC + GCH $\sim$ ZFC + $\neg$GCH.

Cohen はこんにち**強制法**と呼ばれる手法を編み出し，この定理を証明しました．Gödel の L が宇宙 V を内側に削っていくものであったのに対し，強制法は逆に V を**外側へと拡張していく**もので，有理数体 $\mathbb{Q}$ に超越数 α を添加した $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考えるようなものです．

Cohen は，集合論の宇宙 V をとって，その外側か**ら新たな実数を $\aleph_2$ 個付け加える**ことによって連続体仮説を破ったのです．

しかし，厳密には V の「外側」の元など存在しません．ではどのようにこれを実現したのかといえば，集合の概念を，**所属確率付きの集合**に拡張する，というのが強制法の核となる考え方です．確率といっても，実数値の確率ではなく，付け加えたい元の**近似条件**をその代わりに用います．より詳しく，添加したい「理想元」を自由度で並べた**擬順序集合**を用います：

Def. 6. $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ が**擬順序集合**（**poset**）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\leq_{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}$ 上の反射的（$x \leq x$）かつ推移的（$x \leq y \leq z \implies x \leq z$）な二項関係で，$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ はその最大元．
各 poset $\mathbb{P}$ を**強制概念**，$\mathbb{P}$ の各元を**強制条件**と呼び，$p \leq q$ は「p は q を拡張する (p extends q)」と読む．

ここで，$\leq_{\mathbb{P}}$ に**反対称性を仮定しない**（つまり $x \leq y \leq x$ でも $x = y$ とは限らない）ことに注意しましょう．
この定義だけ見せられてもよくわからないと思うので，例として新たな実数を一つ付け加える強制概念を考えましょう．

Def. 7. $\mathsf{Add}(\alpha) := ({}^{<\alpha}2, \supseteq, \emptyset)$ を α **の部分集合を付け加える強制概念**と呼ぶ．特に $\mathsf{Add}(\omega)$ を実数を付け加える強制概念と言う．

$\mathsf{Add}(\omega)$ の各強制条件は $0, 1$ の有限列で，二進小数展開を考えれば**実数の有限桁近似**と見ることが出来ます．$p \leq q$, つまり p が q よりも情報を持っているということは，つまり桁数が多い，ということですから，自然な順序が入っていると思うことが出来ます．
この poset と実数の関係をもう少し観察してみましょう．以下，実数といったら $0, 1$ の無限列 $x : \omega \to 2$ だとします．こういう関数の全体を ${}^{\omega}2$ と書くことにします．各 $x \in {}^{\omega}2$ に対して，その有限桁近似全体 G_x を考えてみましょう：

$$G_x := \{\, x \restriction n := \langle x(0), x(1), \ldots, x(n-1) \rangle \mid n < \omega \,\}.$$

この時，ちょっとした観察で次がわかります：

(1) $G_x \subsetneq \mathsf{Add}(\omega)$.
(2) $t \subseteq s \in G_x$ なら $t \in G_x$. $\mathsf{Add}(\omega)$ の順序は逆向きの包含で入れていたので，つまり G_x は順序 $\leq$ について**上に閉じている**.
(3) $s, t \in G_x$ なら，$u \supset s, t$ を満たす $u \in G_x$ が存在する（特に $s \cup t \in G_x$）．つまり，G_x の任意の二元は G_x の中に**共通の拡張**を持つ.
(4) G_x はこれらの条件を満たす $\mathsf{Add}(\omega)$ の部分集合の中で**極大である**．つまり，$s \in \mathsf{Add}(\omega) \setminus G_x$ を取れば，$\{\, s \,\} \cup G_x$ は上の三条件のいずれか一つを満たさなくなる.

逆に，こうした G が与えられた時，$\bigcup_{s \in G} s$ は一つの実数を定めることがすぐにわかります．実は，上のような性質を満たす poset の部分集合には名前がついています：

Def. 8. $\mathbb{P}$ を poset とする．

- $G \subseteq \mathbb{P}$ が**フィルター** $\overset{\text{def}}{\iff}$ G は上記条件 (1)(2)(3) を満たす.
- G が**超フィルター** $\overset{\text{def}}{\iff}$ G はフィルターでなおかつ極大.

上の議論を要するに，$\mathsf{Add}(\omega)$ の超フィルターと実数は一対一に対応している，という訳です．これらの条件はある種の拡張可能性の条件だと思えるので，超フィルターは coherent に「貼り合わせ」る事の出来る近似条件の集合だと思えます．したがって，我々の目標は「特別な超フィルター」を追加することになります．
「この宇宙にない」超フィルターが欲しいので，それは V 上「超越的」なものであってほしいでしょう．つまり，V から見るとまるっきり識別できないような，普遍的な性質を持つようなフィルターが欲しい訳です．

この「普遍的な」という性質が問題になりますが，それは次のように定義されます：

Def. 9. • $D \subseteq \mathbb{P}$ が**稠密** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall p \in \mathbb{P}\, \exists d \in D\; d \leq_{\mathbb{P}} p$.

• $\mathscr{D}$ を適当な集合族とする．フィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathscr{D}$ 上 $\mathbb{P}$-**ジェネリック** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{P}$ の任意の稠密集合 $D \in \mathscr{D}$ に対し $D \cap G \neq \emptyset$.

稠密集合というのは，「どの近似も，その性質満たすように拡張出来る」という，ある意味で普遍的な性質であると見做すことが出来ます．ジェネリックフィルターは，「$\mathscr{D}$ でキャッチされているような普遍的な性質を全て満たす」理想元だと思うことが出来ます．

例を見てみましょう．

例 1. $x \in {}^{\omega}2$ を実数とする時，

$$D_x := \{\, s \in \mathsf{Add}(\omega) \mid \exists n < \mathrm{lh}(s)\; s(n) \neq x(n) \,\}$$

は $\mathsf{Add}(\omega)$ で稠密．実際，$s \in \mathsf{Add}(\omega)$ に対して，$s \frown (1 - x(\mathrm{lh}(s))) \in D_x$.
そこで，$G \cap D_x \neq \emptyset$ を満たす超フィルター G があれば，$\bigcup G \neq x$.

上の例から，もし V 上 $\mathsf{Add}(\omega)$-ジェネリックなフィルター G が取れれば，$x_G := \bigcup G$ は V に属するどんな実数とも異なる，即ち新しい実数だ，という事になります．もちろん，V の中にそんな実数が存在する筈もありません．

ではどうするか？そこで冒頭に予告した通り，単なる集合の代わりに $\mathsf{Add}(\omega)$-値所属確率付きの集合を考えてやればいい訳です．基本的なアイデアはこうです．集合 x は，特性関数と同一視すれば，部分関数 $x : V \to 2$ だと思うことが出来ます．そこで，真偽値 $2 = \{\, 0, 1 \,\}$ を $\mathsf{Add}(\omega)$ に置き換えてしまって「集合」の定義を書き換えようというのが強制法の基本的なアイデアです．但し，一般の $\mathbb{P}$ に対しては真偽値が一意に決まるとは限らないので，ちょっと定義は違うものになっています．

Def. 10. Poset $\mathbb{P}$ に対し，$\mathbb{P}$-**名称**の全体 $V^{\mathbb{P}}$ を次のように定義する：

$$V_0^{\mathbb{P}} := \emptyset, \qquad V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} := \mathcal{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}), \qquad V_\gamma^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta^{\mathbb{P}}\ (\gamma : \text{極限順序数}),$$

$$V^{\mathbb{P}} := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{\mathbb{P}}.$$

$x \in V$ に対し，$\check{x} \in V^{\mathbb{P}}$ を次で定める：

$$\check{x} := \{\, (\check{y}, \mathbb{1}) \mid y \in x \,\}.$$

この時，$\check{V} := \{\, \check{x} \mid x \in V \,\}$ とおけば，V と $\check{V}$ は同一視でき，V “$\subseteq$” $V^{\mathbb{P}}$ と見做せる．更に，**ジェネリックフィルターの標準的名称** $\dot{G}$ を次で定める：

$$\dot{G} := \{\, (\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P} \,\}.$$

この $V^{\mathbb{P}}$ が，あたかも V に「理想的な元を追加した」宇宙のように振舞い，その中で $\dot{G}$ が V 上のジェネリックフィルターのように振舞います．実際には，$\dot{G}$ の近似 p が与えられた時に，どういった命題が成り立つのかを調べることしか出来ません．

定理 10. $\mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ にパラメータを持つ任意の論理式 φ に対して，$p \Vdash^{V}_{\mathbb{P}} \varphi$（$p$ **forces** φ）が定義され，次を満たす．

(1) $p \leq q \Vdash \varphi \implies p \Vdash \varphi$,
(2) $\mathbb{1} \Vdash \mathrm{ZFC}$,
(3) $\mathbb{1} \Vdash$ “$\dot{G} : \check{V}$ 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックフィルター”,
(4) $p \Vdash \check{p} \in \dot{G}$,
(5) $\{\, p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \varphi \,\}$ が $\mathbb{P}$ で稠密なら $\mathbb{1} \Vdash \varphi$,
(6) $p \Vdash \check{\mathrm{On}} = \mathrm{On}$.
(7) ...

「$p \Vdash \varphi$」は，「p が G の “近似” なら G を V に付け加えた最小の宇宙 $V[G]$ で φ が成り立つ」という意味です．$\mathbb{P}$ の元は自由度で並べられていた訳ですから，近似を精しくした所で成り立つ命題は増えこそすれ減りはしない，というのが条件 (1) の言っていることです．そして，この関係によって実際に $\dot{G}$ が V 上の求めるジェネリックフィルターになっている，ということが条件 (3) の主張です．

これらの性質を使えば，実質的には $V^{\mathbb{B}}$ をあたかも本物の，V の「外側にある」宇宙 $V[G]$ だと思うことが出来ます．なので，集合論者は $V^{\mathbb{B}}$ と書く代わりに $V[G]$ と書いて，あたかも本物の V-ジェネリックフィルター G が取れているかのような記法を用いて議論をします．

では実際に，$V[G]$ において実数 $x_G := \bigcup G$ が V の実数と異なることを見ましょう．といっても，上の例で挙げた D_x を考えれば，$V[G]$ では G が V 上の $\mathsf{Add}(\omega)$-ジェネリックフィルターとして機能していますから，$x \in V \cap {}^{\omega}2$ に対して，$D_x = \{\, s \in \mathsf{Add}(\omega) \mid \exists n < \mathrm{lh}(s)\, s(n) \neq x(n) \,\}$ は V の中で定義出来るので，$G \cap D_x \neq \emptyset$ となり，やはり同じ議論で $\forall x \in V\ x \neq x_G$ が言えます．

さて，あとは同時に $\aleph_2$ 個の実数を付け加えてやることが出来れば，$V[G]$ で CH を破ることが出来ます．直感的には，単純に $\mathsf{Add}(\omega)$ を $\aleph_2$ 個直積とってやれば良さそうです．だいたいそれでよいのですが，実際には次のものを使います：

Def. 11. $\mathsf{Add}(\omega,\kappa)$ を次で定める：

$$\mathsf{Add}(\omega,\kappa) := \prod_{\alpha<\kappa}^{<\aleph_0} \mathsf{Add}(\omega) = \left\{ p : 関数 \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa, |\kappa| < \aleph_0 \\ \mathrm{ran}(p) \subseteq \mathsf{Add}(\omega) \end{array} \right\},$$

$$p \le q \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}_{\mathsf{Add}(\omega,\kappa)} \mathrm{dom}(p) \supseteq \mathrm{dom}(q) \wedge \forall \alpha \in \mathrm{dom}(q)\, p(\alpha) \le_{\mathsf{Add}(\omega)} q(\alpha).$$

実際の直積と違うのは，**直積因子のうち有限個しか値をとらない**ことです．この形の直積は，**有限台直積**と言います．これは通常の直積位相の生成元と似たような構成になっていますね．なぜでしょうか？実は，そうしないと $\aleph_2$ **が** $V[G]$ **では潰れてしまうかもしれない**からです．どういうことでしょう？まず，「基数である」というのは，「それ未満の順序数から全単射がないこと」でした．なので，$\aleph_2$ 個の実数を足す際に，余計な全射が付け加わらないように気にしてやる必要があるのです．

このように，「基数が潰れない」という事は，poset の組合せ論的性質を基に示すことが出来ます．たとえば，次のように：

Def. 12.

- $A \subseteq \mathbb{P}$ が**反鎖** $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $p, q \in A$ に対し，$r \le p, q$ となるような $r \in \mathbb{P}$ は存在しない．
- $\mathbb{P}$ が**可算鎖条件** (c.c.c.) を満たす $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{P}$ の反鎖の濃度は全て可算．

Fact 1. $\mathbb{P}$ が可算鎖条件を満たすなら，$\mathbb{P}$ は全ての基数を保つ．即ち，任意の基数 κ に対し，$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash$ “$\check{\kappa}$: 基数”．

Fact 2. 可算鎖条件を満たす posets の有限台直積は c.c.c. を満たす．

Fact 3. $\mathsf{Add}(\omega)$ は可算鎖条件を満たす．

以上の事から，$\mathsf{Add}(\omega,\aleph_2)$ が可算鎖条件を満たすことがわかり，従って基数を壊さないことがわかる訳です．さて，では G を $\mathsf{Add}(\omega,\aleph_2)$-ジェネリックとする時，ちゃんと $\aleph_2$-個の実数が付け加わっている事を見ましょう．

$$D_{\alpha,\beta} := \{\, p \in \mathsf{Add}(\omega,\kappa) \mid \alpha,\beta \in \mathrm{dom}(p), \exists n \in \mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \mathrm{dom}(p(\alpha))\, p(\alpha)(n) \neq p(\beta)(n) \,\} \ (\alpha < \beta < \kappa)$$
$$E_n := \{\, p \in \mathsf{Add}(\omega,\kappa) \mid \forall \alpha \in \mathrm{dom}(p)\ \mathrm{dom}(p(\alpha)) \geq n \,\} \ (n < \omega).$$

$D_{\alpha,\beta}$ は，「α, β が p のドメインに入っており，それらはどこかの桁で異なっている」という条件で，E_n は，「各 $p(\alpha)$ は n 桁以上ある」です．いずれも稠密であることは，定義域が有限であることからすぐにわかります．

すると，$V[G]$ では $G \cap D_{\alpha,\beta} \neq \emptyset$, $G \cap E_n \neq \emptyset$ となるので，

$$f_\alpha := \bigcup \{\, q(\alpha) \mid q \in G \,\} \ (\alpha < \kappa)$$

とおけば，$f_\alpha \in {}^{\omega}2$ が成り立ち，しかも $\alpha < \beta$ なら $f_\alpha \neq f_\beta$ となります．よって，$\aleph_2^V$-個の実数が $V[G]$ では付け加わっていることになり，$\mathsf{Add}(\omega,\kappa)$ が基数を保存する事から，$V[G]$ でも実数が $\aleph_2$ 個増えている事がわかります．

よって，

定理 11. G を $\mathsf{Add}(\omega,\aleph_2)$-ジェネリックとすると，$V[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$．よって特に $V[G] \models \neg\mathrm{GCH}$.

実はここでは $=$ が成り立つのですが，面倒くさいのでやりません．

2.3 GCH を巡るその後の展開：連続体濃度は幾つか？

こうして GCH や CH は ZFC から独立だということがわかりました．この結果を巡って，二つの立場があり得ます．

(i) ZFC から独立なのだから，GCH や CH は真偽が決まらず，好きな時に好きな方を研究すれば良い．
(ii) ZFC から独立だが，我々の「無限」観を反映した何らかの自然な仮定から CH の真偽が決定出来る筈だ．

Cohen はその後集合論以外の分野に未解決問題を求めて旅立ってしまいましたが，Gödel は(ii)の立場を取っていたことが知られています．特に，Gödel は $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ であろう，と予想していました．そして，それが正しいにせよ間違っているにせよ，**巨大基数**と呼ばれる，ZFC からは存在を証明出来ない非常に大きな無限について分析していくことで，連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ の大きさを決定出来る筈だ，と提唱しました．これは **Gödel のプログラム**と呼ばれています．

そういったものの中で最弱のものが**到達不能基数**です：

Def. 13.
- 基数 κ に対し，κ の**共終数** $\mathrm{cf}(\kappa)$ を次で定義する：

$$\kappa = \min \left\{ \gamma \leq \kappa \;\middle|\; \exists \{\, \xi_\alpha \,\}_{\alpha<\gamma} \subseteq \kappa\ \sup_{\alpha<\gamma} \xi_\alpha = \kappa \right\}.$$

直感的には，κ の近似列の最小の長さが $\mathrm{cf}\,\kappa$ である．

- $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ を満たす基数 κ を**正則基数**，そうでない基数を**特異基数**と呼ぶ．
  ω や後続基数 κ^+ は正則基数である．一方，$\sup_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega$ となるので，$\aleph_\omega$ は特異基数である．
- 基数 κ が**強極限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \lambda < \kappa\, 2^\lambda < \kappa$.
  ω は強極限であり，連続体仮説の下で $\aleph_\omega$ も強極限である．後続基数は強極限基数ではない．
- 基数 κ が**到達不能基数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ κ は非可算で，正則かつ強極限基数.

この到達不能基数が，巨大基数の中で最小のものである．直感的に説明すれば，κ よりも下の部分が集合論的な操作により閉じている，という事である．実際，次の定理が示すように，V_κ は ZFC のモデルとなる：

Fact 4. κ を到達不能基数とするとき，$V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$. 特に，$\mathrm{ZFC} + \exists$到達不能基数 から Con(ZFC) が証明出来る．従って $\mathrm{ZFC} \lneqq \mathrm{ZFC} + \mathrm{IC}$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0=1 \arrow[d] & & \text{強} \\
 & I0\text{–}I3 \arrow[d] & & \\
 & \text{超コンパクト} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\text{超強} \arrow[dr] & & \text{強コンパクト} \arrow[dl] & \\
 & \text{Woodin} \arrow[d] & & \\
 & \text{可測} \arrow[d] & & \\
 & \text{弱コンパクト} \arrow[d] & & \\
 & \text{Mahlo} \arrow[d] & & \\
 & \text{到達不能} & & \text{弱} \arrow[uuuuuuuu]
\end{tikzcd}
$$

圏論的には，到達不能基数の存在は Grothendieck 宇宙の存在と同値であるそうな．

ところで，到達不能基数の性質の「非可算」の条件を落とせば，ω も同じ性質を満たす．更に，V_ω は ZFC から「無限集合の存在」を除いた集合論のモデルになっている．

つまり，**到達不能基数は ω に非常によく似ている**のである．巨大基数には厳密に定義がある訳ではないが，こうした ω と良く似た性質を持ち，ZFC（やそれよりも強い集合論）の無矛盾性を導くような無限基数の事を指すことが多い．右図は，巨大基数の階層からの抜粋です．途中で分岐している部分がありますが，これは「まだどっちが強いのかわかっていない」部分であり，基本的には線型にならぶだろうと予想されています．「全体を反映した部分が欲しい」というのは自然な欲求だし，ω に似た無限はないか？と考えるのも自然である，という意味で，巨大基数公理は自然な存在だと言える（実際にはもう少し条件を課すこともあり，そっちが中心なんだけど）.

なぜ巨大基数公理を考えるのかというと，それは**独立命題の強さを測る指標として機能する**からです．無矛盾性に関する順序 $\lneqq$ で並べた巨大基数の階層を考え，独立命題をそのものさしの中で分類することは，現代集合論でも主要な研究分野の一つです．

特に，**連続体仮説**もそうした分析の対象になっています．たとえば，「ある性質を満たす poset についての，十分小さなジェネリックフィルターは元々の宇宙 V に存在する」という事を主張する公理を**強制法公理**と呼びます．これは創りたいものが手許にあるという要請で，いわば自然な公理と言えます．その中でも**適正強制公理**（Proper Forcing Axiom; PFA）と呼ばれるものは，$2^{\aleph_0} = \aleph_2$ を導くことがわかっています．PFA の無矛盾性は，超コンパクト基数と呼ばれる基数の存在から導かれることがわかっており，この前提を何処まで押し下げられるか，というのは重要な未解決問題の一つです．つまり，連続体濃度を「自然に決定」するには，

どのくらいの巨大基数が必要なのか？どのくらいの無矛盾性が要るのか？という事は，まだわかっていない訳です．

この方向性以外にも，連続体濃度を決定する「自然な仮定」を研究しようとする動きはあり，Woodin の Ω-論理などがその中では有名ですが，筆者はよく知らないので，この辺りにしておきます．

3　実数の集合論　測度の問題を例に

集合論の勃興が Fourier 解析からであったように，実数の集合の性質に関する集合論的な研究は現代でも盛んに行われており，集合論の各分野が交差する場所でもあります．そうした，実数の集合の性質について研究する集合論の分野を**記述集合論**といいます．

そこで，この分野から特に**測度の問題**について採り上げたいと思います．

Lebesgue 測度は解析学や関数解析で重要な概念ですが，よく知られているように，選択公理の下では非可測な集合が存在することは良く知られています．

定理 12 (Vitali). $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の完全代表系は Lebesgue 非可測である．

この証明は，次のように行われます：

(1) 選択公理を使って $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の完全代表系 S を取る．
(2) S が可測だとすると，零集合となる事を示す．
(3) 一方，$\mathbb{R}$ は S の可算個の平行移動で覆える．
(4) よって Lebesgue 測度の平行移動不変性から $\mu(\mathbb{R}) = 0$ となり矛盾．

この証明を眺めていて，以下のような疑問が沸いてきます：

(A) 平行移動不変性を外せば，全ての部分集合に測度を定義出来ないか？
(B) 選択公理を使って作られる集合は具体的に書き下せない．では，具体的に論理式で定義される集合は，どの程度複雑な集合までなら可測であり得るか？
(C) 完全代表系は取れないが，測度論の初歩くらいなら展開出来る程度に選択公理を弱めたらどうか？

それぞれ，順に見ていきましょう．

(A)「平行移動不変性を外す」

並行移動不変性を外した場合については，実は**巨大基数公理**と無矛盾性等価であることがわかっています．

Def. 14.
- 基数 κ 上の **(超) フィルター**とは，擬順序集合 $(\mathcal{P}(\kappa), \subseteq)$ の (超) フィルターの事とする．
- フィルター $\mathcal{F}$ に対して，その**双対イデアル** $\mathcal{F}^* := \{ A \subseteq \kappa \mid \kappa \setminus A \in \mathcal{F} \}$ のこと．

- $A \subseteq \kappa$ が **$\mathcal{F}$-正集合** $\overset{\text{def}}{\iff} \kappa \setminus A \in \mathcal{F}^+$.
  $\mathcal{F}$-正集合の全体を $\mathcal{F}^+$ で表す.
- フィルター $\mathcal{F}$ が**非単項** $\overset{\text{def}}{\iff} \bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
- フィルター $\mathcal{F}$ が **λ-完備**，あるいは $\mathcal{F}$ が **λ-フィルター** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\xi < \lambda$ と $\{ A_\alpha \mid \alpha < \xi \} \subseteq \mathcal{F}$ に対し，$\bigcap_{\alpha<\xi} A_\lambda \in \mathcal{F}$.
- イデアルについても，同様に飽和性と完備性が定義される.
- 基数 κ が**可測基数** $\overset{\text{def}}{\iff}$ κ は非可算であり，κ 上に非単項 κ-完備超フィルターが存在する.

集合論の伝統的な分野である**無限組合せ論**では，こうした集合上のフィルターやイデアルの完備性や飽和性を調べることが大きな興味の一つになっています.

「ω-完備」は，結局有限個の共通部分について閉じているということですから，これは結局フィルターの定義に入っています．なので，「ω 上の非単項 ω-完備超フィルターの存在」は結局「ω 上の非単項超フィルターの存在」と同値で，これは選択公理があれば常に言えることです*3)．したがって，「ω の性質を非可算に一般化した」という意味でも，これは「自然な」物でもある訳です.

可測基数は，次の補題が示すように到達不能基数に比べても「馬鹿デカい」ですが，だいたい現代の集合論者は可測基数くらいはあるだろうと（経験的に）思っています：

補題 1. κ が可測基数なら，κ は κ 番目の到達不能基数*4).

こうした組合せ論的文脈で自然に現れるこの定義が，実は測度の拡張可能性，という実数に関わる問題と関連しているのです.

定理 13 (Solovay, 1971). 次は無矛盾性等価：

- ZFC + 平行移動不変性を外せば，Lebesgue 測度を全ての実数の部分集合に拡張出来る.
- ZFC + $\exists$可測基数.

実は，可測基数は**初等埋め込み**という集合論（やもともとはモデル理論の）手法と深い関りがあり，可測基数よりも上の巨大基数は扱いのいい初等埋め込みの存在という形で定義されることが多いです.

*3) というか，「ω 上の非単項超フィルターの存在」は弱い選択公理の一種としてよく扱われます.
*4) 実際には，Mahlo 基数と呼ばれる可測基数より弱い巨大基数がこの性質を持つ.

Def. 15. M を内部モデルとする．$j : V \to M$ が**初等埋め込み** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $j \neq \mathrm{id}$ であり，任意の論理式 $\varphi(x)$ と任意のパラメータ $a_1, \ldots, a_n \in V$ に対して，$V \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff M \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n))$.

つまり，初等埋め込みとは，V の各元を，論理式で識別出来る性質は保ちつつ内部モデル M の中に並び換えて埋め込むようなものです．

定理 14. κ が可測基数 $\iff$ 次を満たす初等埋め込み j が存在する：

- $j(\kappa) > \kappa, \forall \alpha < \kappa\, j(\alpha) = \alpha$.
- $A \subseteq M$ かつ $|A| < \kappa$ ならば $A \in M$.

さらにこの M の各元は関数 $f : \kappa \to V$ を用いて $[f]$ の形で表現出来る．ここで，$[-]$ は κ 上の「いい感じ」な非単項 κ-超フィルターの元上で一致する物を同一視する同値関係で割った同値類．とくに $[\mathrm{id}] = \kappa$ にできる．

(B) どの程度まで複雑な集合なら Lebesgue 可測になれるか？

「どの程度複雑な集合」と書いていますが，具体的には**定義論理式の複雑さ**で分類をします：

Def. 16.

- 量化子が $\forall x \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}$ の形で，実数をパラメータとする論理式を $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-論理式と呼ぶ．
- φ を $\boldsymbol{\Delta}^1_1$-論理式とする．$\exists x_1 \in \mathbb{R} \ldots \exists x_n \in \mathbb{R}\, \varphi$ の形の論理式を $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-論理式と呼ぶ．
  $\forall x_1 \in \mathbb{R} \ldots \forall x_n \in \mathbb{R}\, \varphi$ の形の論理式を $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-論理式と呼ぶ．
- $\boldsymbol{\Pi}^1_n$-論理式 φ に対し，$\exists x_1 \in \mathbb{R} \ldots \exists x_n \in \mathbb{R}\, \varphi$ の形の論理式を $\boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1}$-論理式と呼ぶ．
  $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$-論理式 φ に対し，$\exists x_1 \in \mathbb{R} \ldots \exists x_n \in \mathbb{R}\, \varphi$ の形の論理式を $\boldsymbol{\Pi}^1_{n+1}$-論理式と呼ぶ．
- 論理式 φ が $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ であるとは，同値な $\boldsymbol{\Pi}^1_n$-論理式と $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$-論理式を持つことである．
- 実数の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ が $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$（または $\boldsymbol{\Pi}^1_n$, $\boldsymbol{\Delta}^1_n$）であるとは，そういう論理式で定義される事．
- いずれかの $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$-集合に属する集合を**射影集合**と呼ぶ．

この階層は，次のような真の包含関係を満たします：

$$
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\Sigma}^1_1 \arrow[dr, phantom, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 \arrow[dr, phantom, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & \cdots \\
\boldsymbol{\Delta}^1_1 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq"] \arrow[dr, phantom, "\subsetneq"] & & \\
 & \boldsymbol{\Pi}^1_1 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 \arrow[ur, phantom, "\subsetneq"] & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Borel 集合全体

射影集合は、実は Borel 集合から射影と補集合を取って得られる集合のクラスに等しいです：

補題 2.
- A が $\mathbf{\Delta}^1_1$-集合 $\iff$ A は Borel 集合
- A が $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$-集合 $\iff$ A は $\mathbf{\Pi}^1_n$-集合 $B \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の射影(i.e. $A = \exists^{\mathbb{R}} B := \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in B \,\}$).
- A が $\mathbf{\Pi}^1_n$-集合 $\iff$ $\mathbf{\Sigma}^1_n$-集合の補集合.

では射影集合の可測性について見ていきましょう．次の定理は ZFC で示せます：

定理 15. 任意の $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合は Lebesgue 可測．従って $\mathbf{\Pi}^1_1$ と $\mathbf{\Delta}^1_1$ もそう．

ではこの先はどうか？というと，$\mathbf{\Delta}^1_3$-集合までは，ZFC からはみ出ないことが知られています．以下，射影集合のクラス $\mathbf{\Gamma}$ に対し，「任意の $\mathbf{\Gamma}$-集合か可測」であることを $\mathbf{\Gamma}(\mathcal{N})$ と略記します：

定理 16. 以下の理論は矛盾性等価：

- ZFC,
- ZFC + $\neg\mathbf{\Delta}^1_2(\mathcal{N})$
- ZFC + $\mathbf{\Delta}^1_2(\mathcal{N}) + \neg\mathbf{\Sigma}^1_2(\mathcal{N})$,
- ZFC + $\mathbf{\Sigma}^1_2(\mathcal{N}) + \neg\mathbf{\Delta}^1_3(\mathcal{N})$,
- ZFC + $\mathbf{\Delta}^1_3(\mathcal{N}) + \neg\mathbf{\Sigma}^1_3(\mathcal{N})$.

一方，Shelah [5] は，**$\mathbf{\Sigma}^1_3$-集合の可測性には到達不能基数の存在が必要である**ことを示しました．

定理 17 (Shelah, 1984). 次の理論は無矛盾性等価：

- ZFC + ∃到達不能基数,
- ZFC + $\mathbf{\Sigma}^1_3(\mathcal{N})$.

特に，任意の $\mathbf{\Sigma}^1_3$-集合が Lebesgue 可測なら，V の $\aleph_1$ を L から見ると**到達不能基数**に見える．

これ以上はというと, 実は Shelah の論文の 10 年前に (実は永らく未発表だったので 20 年前に), Solovay [6]

が次を示していました：

定理 18 (Solovay, 1974). κ を到達不能基数とし，$\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ を ω と κ の間の基数すべてに全射を付け加え，$V[G] \models \kappa = \aleph_1$ にしてしまう強制概念とする．G が $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-ジェネリックなら，$V[G]$ で任意の射影集合は Lebesgue 可測となる．

系 3. 以下の理論は無矛盾性等価：

- ZFC + ∃到達不能基数,
- $\mathrm{ZFC} + \forall n\, \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{N})$.

実は，射影集合よりも広く，順序数の可算列を使って定義出来る集合も $V[G]$ では全て Lebesgue 可測となります．つまり，「定義可能な集合」のほとんどを可測とするには，**せいぜい到達不能基数があれば十分**という訳です（参照：不完全性定理）．歴史的には，Solovay はこの到達不能基数の仮定を落とせると考えていたのですが，10 年後に Shelah が上記の定理によって落とせない事を示した，というのが順番になります．

更に，ここから実数をパラメータに使って定義可能な集合だけからなる $L(\mathbb{R})$ という内部モデルを考えれば，$V[G]$ の $L(\mathbb{R})$ では，ZF + 弱い選択公理 が成り立っていて，上記の定理から「任意の実数の部分集合が可測」になっています．これにより，(C)「選択公理を弱めたら任意の集合を Lebesgue 可測にできるか？」という問題も，「**到達不能基数の無矛盾性を認めるなら出来る**」という答えが得られたことになります．

3.1 その先へ

実は，上記の Solovay の結果は，Lebesgue 可測性以外にも，完全集合性質や Baire の性質といった，実数の集合に関する他の性質についても取り扱っています．当時，$\mathbf{\Sigma}^1_2$-集合の完全集合性質から到達不能基数の無矛盾性が出ることは知られていましたが，Baire の性質については知られていませんでした．また，Baire の性質はいわゆる Baire の範疇（カテゴリー）定理に出て来る第一類集合と関連が深いものです．実際，Lebesgue 可測性は「Borel 集合と測度零の差しかない」という形で特徴付けられるのに対し，Baire の性質も「Borel 集合と痩せ集合（閉疎集合の可算和）の差しかない」という形で定義出来ます．Lebesgue 零集合全体のイデアル $\mathcal{N}$ も痩せ集合全体のイデアル $\mathcal{M}$ も，共に ω_1-完備であり，更に Fubini の定理を満たします．このようにカテゴリーと Lebesgue 測度の間には非常な類似性，双対性があり，当時は両者は殆んど同じものだと考えられてきました．なので，Solovay は Lebesgue 可測性にも Baire の性質にも，到達不能基数は要らないだろうと考えていたのです．ところが，Shelah は上の論文で，射影集合の Baire 性には到達不能基数は不要なことを示しました：

定理 19. 次の理論は無矛盾性等価：

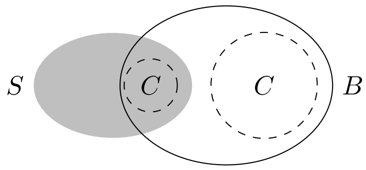
- ZFC,
- ZFC $+ \forall n\ \mathbf{\Sigma}^1_n(\mathcal{M})$.

特に，ZFC + CH のモデルから出発して，任意の射影集合を Baire にするような強制概念が存在する．

こうして，実は Lebesgue 可測性と Baire の性質については，無矛盾性の強さという根本のところで大きな隔りがあることが明らかになった訳です．

また，近年 Khomskii [3] は，より一般の ω_1-完備イデアル $\mathcal{I}$ に対して，実数の集合についての **$\mathcal{I}$-正則性**の概念を定式化しました：

Def. 17. $S \subseteq \mathbb{R}$ が $\mathcal{I}$-正則 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\mathcal{I}$-正 Borel 集合 B に対し，それに含まれる $\mathcal{I}$-正 Borel 集合 C で $C \cap S = \emptyset$ または $C \subseteq S$ を満たすものが存在．



Baire の性質と Lebesgue 可測性以外のこの形で表現出来る正則性については，多くの場合 $\mathbf{\Sigma}^1_2$ での $\mathcal{I}$-正則性から既に到達不能基数の無矛盾性が出ることが，個別的な各論で知られています．これらの差異の原因を組合せ論的性質に基づいて解明出来ないか？ということが，講演者の現在の研究課題の一部です．

参考文献

[1] Thomas Jech, **Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded**, 3rd, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002, ISBN: 978-3-540-44085-7.

[2] Akihiro Kanamori, **The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings**, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2009.

[3] Yurii Khomskii, **Regularity Properties and Definability in the Real Number Continuum: Idealized forcing, polarized partitions, Hausdorff gaps and mad families in the projective hierarchy**, PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, 2012.

[4] Kenneth Kunen, **Set Theory**, vol. 34, Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.

[5] Saharon Shelah, **Can You Take Solovay's Inaccessible Away?**, Israel Journal of Mathematics 48.**1** (1984), pp. 1–47, ISSN: 0021-2172, DOI: `10.1007/BF02760522`, URL: `http://dx.doi.org/10.1007/BF02760522`.

[6] Robert M. Solovay, **A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable**, The Annals of Mathematics, 2nd ser. 92.**1** (July 1970), pp. 1–56, ISSN: 0003486X, DOI: `10.2307/1970696`, URL: `http://www.jstor.org/stable/1970696`.

[7] 田中一之 et al., **ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック）4 集合論とプラトニズム**, ed. by 田中一之, vol. 4, ゲーデルと 20 世紀の論理学, 東京大学出版会, 2007.